

同步练习 P235 理学院 廖国勇 2016.5.10

5. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!}$ ($a > 0, a \neq e$) 的敛散性.

解:
$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{a^{n+1} (n+1)!}}{\frac{n^n}{a^n n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$$
$$= \frac{e}{a}$$

当 $a > e$ 时, $\rho < 1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!}$ 收敛

当 $a < e$ 时, $\rho > 1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!}$ 发散

注, 这道题把 $\rho = 1$ 的情况, 即 $a = e$ 的情况除掉了, 题目简单了, 若

$a = e$ 的情况下, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$ 的敛散性如何呢?

首先, 要知道级数里面一个有名的斯特林公式 (sterling's formula)

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \quad \text{也可以写成} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n n!}{n^n \sqrt{2\pi n}} = 1$$

于是由斯特公式知:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^n}{e^n n!}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{即级数} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!} \text{ 与级数} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ 具有相同敛散性}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 发散, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$ 发散

对于 $a < 0$ 的情况, 自己去解决, 我把结果写下

$-e < a < 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!}$ 发散

$a < -e$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!}$ 收敛

$a = -e$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!}$ 收敛 (莱布尼兹会告诉你为什么)

那么, $a = 0$ 呢, 老师? 这个问题我也是醉了。

同步练习 P236 理学院 廖国勇 籍湖南

6 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \arcsin \frac{1}{n}$ 的敛散性, 若收敛是绝对收敛还是条件收敛

解: $\because \arcsin \frac{1}{n} > \arcsin \frac{1}{n+1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1}{n} = 0$

由莱布尼兹判别法知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \arcsin \frac{1}{n}$ 收敛

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n}$ 发散

综上所述, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \arcsin \frac{1}{n}$ 是条件收敛

7. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}$ 的敛散性, 若收敛是绝对收敛还是条件收敛

解: $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$ 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ 收敛, 即级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}$ 绝对收敛

注 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛且 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

8. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \times 5 \times \cdots \times (3n-1)}{1 \times 5 \times \cdots \times (4n-3)}$ 的敛散性

解: $\because \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 \times 5 \times \cdots \times (3n-1) \times (3n+2)}{1 \times 5 \times \cdots \times (4n-3) \times (4n+1)}}{\frac{2 \times 5 \times \cdots \times (3n-1)}{1 \times 5 \times \cdots \times (4n-3)}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1$$

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \times 5 \times \cdots \times (3n-1)}{1 \times 5 \times \cdots \times (4n-3)}$ 收敛

同步练习 P237 10 理学院 廖国勇

10. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 的敛散性, 若其收敛求其和.

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{(n+2)!}}{\frac{n}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = 0 < 1$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 收敛.

由于 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

所以 $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= (1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots) - (\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots)$$

$$= (e-1) - (e-1-1) = 1$$

或者 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$

$$= \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= 1$$

同步练习 P237 10 理学院 廖国勇 2016.5.13.

10 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 的敛散性, 若其收敛求其和

解: $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)}{(n+1+1)!}}{\frac{n}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+2} = 0 < 1$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 收敛

下面求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 的和

方法一, 直接计算

$$u_n = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \\ = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1$$

方法二, 利用公式 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

由 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ 知: $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= e - (e - 1) = 1$$

方法三, 构造幂级数

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} x^{n+1}$, 易知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} x^{n+1}$ 的收敛半径 $R = +\infty$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^n)'}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x t^n dt = \int_0^x t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

$$= \int_0^x t e^t dt = t e^t \Big|_0^x - \int_0^x e^t dt = x e^x - e^x + 1$$

显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = S(1) = 1 \cdot e^1 - e^1 + 1 = 1$

同步练习 P238 12 理学院 廖国勇

12. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n > 0$) 的部分和 S_n , 记 $V_n = \frac{1}{S_n}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ 收敛, 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

解: $\because \sum_{n=1}^{\infty} V_n$ 收敛, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{V_n} = +\infty$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是发散的.

13. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 的敛散性.

解: $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 $\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 发散.

11. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}$ 的敛散性

解: $\because \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(\frac{n+1}{n})^n} = \frac{3}{e} > 1$

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}$ 发散

9. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 的敛散性.

解: $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}}{\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{e} < 1$

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 收敛.

同步练习 P238 14 理学院 廖国勇

14. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 的敛散性.

解: $\because$ 正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少

$\therefore$ 正项数列 $\{a_n\}$ 的极限存在, 不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \geq 0$

由于交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 由莱布尼兹判定法则知

$$A > 0$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1+A} < 1$$

所以, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛

15. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1!)^2 + (2!)^2 + \dots + (n!)^2}{(2n)!}$ 的敛散性

$$\text{解: } \frac{(1!)^2 + (2!)^2 + \dots + (n!)^2}{(2n)!} < \frac{n \cdot (n!)^2}{(2n)!} = \frac{n \cdot n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1}{2n \cdot (2n-1) \cdots (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{n \cdot n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2}{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdots (n+2) (n+1)} < \frac{3 \cdot 2}{(n+2) (n+1)} < \frac{6}{n^2} \quad (n \geq 2)$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2}$ 收敛

于是, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1!)^2 + (2!)^2 + \dots + (n!)^2}{(2n)!}$ 收敛.

同步练习 129 三 证明题 理学院 廖国勇

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛

证明: $\because \left| \frac{a_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n} \right|$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛

2. 设 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$ ($n=1, 2, \dots$) 证明 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 收敛

证明 (1) 只要证明数列 $\{a_n\}$ 单调递减有下界即可, 用数学归纳法

①, 显然 $a_1 = 2 > a_2 = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{4} > 1$,

②, 不妨假设 $a_k > a_{k+1} > 1$, 则 $a_{k+2} = \frac{1}{2} \left(a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+1}} \right) > \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{a_{k+1} \frac{1}{a_{k+1}}} = 1$

$$a_{k+1} - a_{k+2} = \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{1}{a_k} \right) - \frac{1}{2} \left(a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+1}} \right) = \frac{1}{2} \left[(a_k - a_{k+1}) + \frac{-(a_k - a_{k+1})}{a_k a_{k+1}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} (a_k - a_{k+1}) \left(1 - \frac{1}{a_k a_{k+1}} \right) > 0$$

由 ①② 知数列 $\{a_k\}$ 是单调递减且以 1 为下界的, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 设为 A

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) \Rightarrow A = \frac{1}{2} \left(A + \frac{1}{A} \right) \Rightarrow A = 1$$

$$(2) \text{ 设 } u_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1, \text{ 则 } u_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2} a_n - \frac{1}{2} \frac{1}{a_n}}{\frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} \frac{1}{a_n}} = \frac{a_n^2 - 1}{a_n^2 + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_{n+1}^2 - 1}{a_{n+1}^2 + 1}}{\frac{a_n^2 - 1}{a_n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) - 1}{a_n - 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 1}{2a_n} = 0 < 1 \quad \text{故级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \text{ 收敛}$$

~~故级数收敛, 证毕~~

注, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^2 + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + 1)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + 1) = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) = 0$$